FACIT

Några uppgifter om additionsformlerna för sinus och cosinus

Uppgifterna är tänkta att lösas utan miniräknare

1. Visa att
$\sin(x + 90°) = \cos(x)$
med hjälp av additionsformeln för sinus

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$VL = \sin(x+90°) = \sin(x)\cdot\cos(90°) + \sin(90°)\cos(x)$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(90°)=0 \\ \sin(90°)=1\end{bmatrix} = \sin(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x)$$

$$= \cos(x) = HL \quad \text{VSV}$$

2. För en vinkel, v, som ligger i första kvadranten gäller att $\cos(v) = \frac{3}{5}$
Bestäm ett exakt värde på $\cos(v + 30°)$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$$

$$\cos(v+30°) = \cos(v)\cdot\cos(30°) - \sin(30°)\cdot\sin(v) =$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos(v) = \frac{3}{5} \\ \sin(30°) = \frac{1}{2} & \sin(v) = \frac{4}{5} \leftarrow \text{Trig. ettan!}\end{bmatrix} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}-4}{10}}$$

3. Visa att

$2\sin(v - 45°) = \sqrt{2}(\sin(v) + \cos(v))$

$$VL = 2\sin(v-45°) = 2(\sin v\cos(45°) + \sin(45°)\cdot\cos v) = \begin{bmatrix}\sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(\sin(v)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos(v)\right) = \begin{bmatrix}\text{Bryt ut} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(v) + \cos(v)) = \left[2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right] = \sqrt{2}(\sin(v) + \cos(v)) = HL$$

VSV.

4. Bestäm ett exakt värde på $\cos(75°)$

$$75° = 45° + 30°$$

$$\cos(75°) = \cos(45°+30°) = \cos(45°)\cdot\cos(30°) - \sin(30°)\cdot\sin(45°) =$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin(30°) = \frac{1}{2} \\ \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\cdot 2}}$$

5. Tryggve Trigonometri föreslår en egen additionsformel för cosinus:

$\cos(a+b) = \cos(a) + \cos(b)$

Förklara för Tryggve varför denna regel inte kan fungera

$(a+b)$ är en vinkel och cos av en vinkel kan aldrig bli större än 1 eller mindre än -1.

Ex: $a = 0^\circ$, $b = 0^\circ$ $\Rightarrow$ $a+b = 0^\circ + 0^\circ = 0^\circ$

$\cos(0^\circ) = 1$

"$\cos(0^\circ) + \cos(0^\circ) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$ omöjligt"

6. Lös nedanstående uppgift ifrån ett gammalt nationellt prov

Visa att $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$ (0/2/0)

$$VL = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin(x)\right) =$$

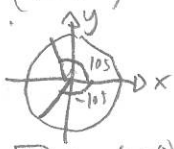
$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\left(\cos(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin(x)\right) = \begin{bmatrix} \text{Gångra in} \\ \sqrt{2} \text{ i ( )} \end{bmatrix} =$$

$$= \cos(x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\sin(x) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\right] = \cos(x) - \sin(x)$$

$= HL$ vsv.

7. Bestäm ett exakt värde på $\sin(-105^\circ)$

$$\sin(-105^\circ) = -\sin(105^\circ) = -\left(\sin(45^\circ + 60^\circ)\right) =$$



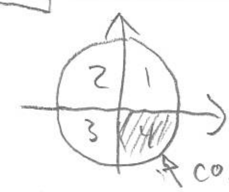
$$= -\left(\sin(45^\circ)\cdot\cos(60^\circ) + \sin(60^\circ)\cdot\cos(45^\circ)\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

8. För en vinkel, v, som ligger i fjärde kvadranten gäller att $\sin(v) = -\frac{2}{3}$

Bestäm ett exakt värde på $\cos(2v)$ genom att utnyttja att $2v = v + v$



$\cos(v) > 0$

$$\cos(2v) = \cos(v+v) = \cos(v)\cdot\cos(v) - \sin(v)\cdot\sin(v)$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(v) = -\frac{2}{3} \\ \cos(v) \text{ fås mha trig. ettan: } \cos(v) = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}$$